

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 5
januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 21,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-130785 en 050-132925.
Tarieven: 1/1 pag. *f* 200,—, 1/2 pag. *f* 110,— en 1/4 pag. *f* 60,—.

Grootheden

P.G.J. VREDENDUIN
Oosterbeek

De bedoeling van dit artikel is lengte, oppervlakte, inhoud, hoekgrootte te analyseren en in te gaan op de notatie ervan.

1. Voordat we hieraan beginnen, willen we eerst nagaan hoe in de natuurkunde en meer algemeen in de praktijk door meting aan een object een getal toegevoegd wordt. Als voorbeeld kies ik de meting van de temperatuur van een lichaam.
Eerst stellen we vast, wanneer we zullen zeggen, dat twee objecten dezelfde temperatuur hebben.

Definitie. Twee objecten *hebben dezelfde temperatuur*, als er, indien ze met elkaar in contact gebracht worden, geen warmteoverdracht van het ene object op het andere plaats heeft.

De relatie 'dezelfde temperatuur hebben' is een ekwivalentierelatie. Deze relatie brengt dus een partitie teweeg in de objecten. De ekwivalentieklassen van deze partitie noemen we temperaturen. Dus:

Definitie. Een *temperatuur* is een verzameling objecten, die alle dezelfde temperatuur hebben, terwijl geen enkel object buiten de verzameling dezelfde temperatuur heeft als een object van de verzameling.

Deze soort begripsvorming is in de praktijk zeer algemeen. In veel gevallen worden begrippen gedefinieerd als ekwivalentieklassen. Om enige voorbeelden te noemen: kleur, waarde (van een munt), massa, lengte, richting, toonhoogte. Men is zich veelal echter nauwelijks bewust, dat men te maken heeft met ekwivalentieklassen.
Als voorbereiding voor de temperatuurmeting kiezen we uit elk van deze ekwivalentieklassen één representant. Daartoe nemen we een bepaald voorwerp v. Laat T een temperatuur (dus een van bovengenoemde ekwivalentieklassen) zijn. Breng v in contact met een element w van T en wacht tot geen warmteoverdracht meer plaats heeft. Onderstel dat daarbij w tot T blijft behoren (hetgeen neerkomt op de fysische onderstelling, dat de warmtecapaciteit van v te verwaarlozen is t.o.v. die van w). Het object v in deze toestand gebracht kiezen we als representant van de ekwivalentieklasse T. Huiselijk zouden we kunnen zeggen, dat we een thermometer met kwikkolom zonder schaalverdeling heb-

ben gemaakt. De functie, die zo aan elke ('elke' mag men met een fysisch korreltje zout nemen) temperatuur een representant toegevoegd heeft, noemen we g. Nu willen we aan deze representanten reële getallen toevoegen. Hoe dit gebeurt, weten we. Breng achter de kwikkolom een schaalverdeling aan, die als volgt geconstrueerd wordt. Breng de kwikkolom in contact met smeltend ijs en zet bij het uiteinde het getal 0. Breng de kolom in contact met kokend water en zet bij het uiteinde het getal 100. Breng verder een evenredige verdeling aan. Aan elke representant wordt zo een getal toegevoegd, namelijk het getal dat bij het boveneinde van de kwikkolom staat. De functie, die op deze wijze aan elke representant een getal toevoegt, noemen we f_C.
Door de functie $f_C \circ g$ wordt dus aan elke temperatuur een getal toegevoegd. Nu zijn we in staat de temperaturen namen te geven. De temperatuur, waaraan door de functie $f_C \circ g$ het getal a toegevoegd wordt, noemen we a graden Celsius.

Definitie. $(f_C \circ g)^{\text{inv}}\ (a) \overset{\text{df}}{=} a$ graden Celsius.

We hadden de schaalverdeling ook op andere wijze kunnen construeren. In plaats van de functie f_C hadden we dan een andere functie gekregen. Ook hadden we andere representanten kunnen kiezen (hetgeen b.v. noodzakelijk is als we temperaturen willen meten, die lager zijn dan het smeltpunt van kwik). We krijgen dan analoge definities, b.v.

Definitie $(f_K \circ g)^{\text{inv}}\ (a) \overset{\text{df}}{=} a$ graden Kelvin.

Ten slotte kunnen we afdalen naar de concrete situaties. Onder de temperatuur van een voorwerp op een bepaald tijdstip verstaan we niets anders dan de ekwivalentieklasse uit de temperaturen waartoe het voorwerp op dat tijdstip behoort. Dus:

Definitie. Als (voorwerp v ten tijde t) $\in T$, waarin T een temperatuur is, dan zegt men dat T de *temperatuur van het voorwerp* v ten tijde t is.

Zo betekent: de temperatuur van v ten tijde t is a graden Celsius: (voorwerp v ten tijde t) $\in$ a graden Celsius.

Het bovenstaande is meteen aanleiding een poging te wagen te definiëren wat onder een grootheid verstaan wordt. We hebben te maken gehad met een verzameling ekwivalentieklassen. Aan al die ekwivalentieklassen werden reële getallen toegevoegd, en wel zo dat aan verschillende klassen verschillende getallen toegevoegd worden. Dit brengt ons op de volgende definitie:

Definitie. Een verzameling ekwivalentieklassen noemt men een *grootheid*, als door een injectie aan de elementen van de verzameling reële getallen toegevoegd zijn. Het op deze wijze aan een ekwivalentieklasse toegevoegde reële getal heet het *maatgetal* van de ekwivalentieklasse.

Deze definitie is stellig geen laatste wijsheid en behoeft verfijning om 'patho-

logische' grootheden uit te sluiten. Maar ze is in elk geval een beginpoging om de term grootheid nauwkeurige inhoud te geven.
De verzameling van alle hierboven gedefinieerde ekwivalentieklassen, die we temperaturen genoemd hebben, is volgens deze definitie een grootheid: temperatuur. De verschillende temperaturen zijn dus elementen van de grootheid temperatuur.

2. Na deze inleiding schakelen we over op de wiskunde. We willen trachten de wiskundige hoekmeting te analyseren en daarbij zoveel mogelijk analoog aan het voorgaande tewerk te gaan.

Definitie. Een *hoek* is de vereniging van twee gesloten halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt.

Wie een hoek wil definiëren als een gesloten deel van het vlak begrensd door twee halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt, kan het vervolg rustig blijven lezen. Hij moet alleen de tekst op passende manier vertalen, waardoor ze van toepassing wordt op zijn hoekbegrip.

Definitie. Twee hoeken *hebben dezelfde grootte,* als er een congruentie bestaat, waarbij de ene hoek als beeld de andere heeft.

We kunnen natuurlijk ook korter zeggen: twee hoeken hebben dezelfde grootte, als ze congruent zijn.
De relatie 'hebben dezelfde grootte' is een ekwivalentierelatie. Deze relatie brengt een partitie teweeg in de verzameling van de hoeken. De ekwivalentieklassen van deze partitie noemen we hoekgrootten. Dus:

Definitie. Een *hoekgrootte* is een verzameling hoeken die alle dezelfde grootte hebben, terwijl geen enkele hoek buiten de verzameling dezelfde grootte heeft als een hoek van de verzameling.

Uit elk van deze ekwivalentieklassen nemen we nu een representant. We gaan daarbij als volgt te werk. Kies een punt O en een halve lijn h met het punt O als uiteinde. De halve lijn h is deel van een lijn l. Er zijn twee gesloten halfvlakken met l als grens. Kies een van deze twee halfvlakken en noem dat H. Elke hoek is dan congruent met een hoek, waarvan h het ene been is en voor het andere been k geldt $k \subset H$.
De hoeken met benen h en k, waarin $k \subset H$, vormen dus een verzameling representanten van de hoekgrootten. De functie, die aan elke hoekgrootte zijn representant toevoegt, noemen we g.

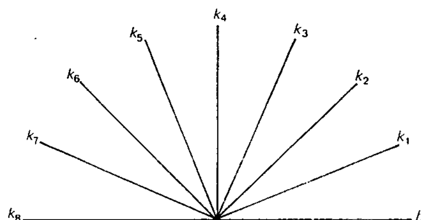
Om hoekmeting mogelijk te maken gaan we aan deze representanten getallen toekennen. Nauwkeuriger gezegd: we ontwerpen een functie f van de verzameling van de representanten naar $\mathbb{R}$, en wel een injectie.
Van fundamenteel belang hierbij is, dat het mogelijk is uit de verzameling van

de representanten er door middel van een definitie één uit te kiezen. Namelijk als volgt

Definitie. De representant, waarvan de benen in elkaars verlengde liggen, noemen we de *gestrekte* representant.

Bij het ontwerpen van de functie f beginnen we met aan deze representant een getal toe te kennen. Dit getal kunnen we willekeurig kiezen. We kiezen hiervoor bijvoorbeeld het getal 180.
Ik volsta met te schetsen, hoe de functie f verder gedefinieerd wordt. Verdeel de gestrekte representant in 2^n ($n \in \mathbb{Z}^+$) gelijke hoeken. In fig. 1 is deze verdeling uitgevoerd voor $n = 3$. De halve lijnen $k_1, k_2, \ldots, k_8$ zijn dus zo getrokken, dat k_8 het verlengde van de halve lijn h is en

hoek (h, k_1), hoek (k_1, k_2), ..., hoek (k_7, k_8) dezelfde grootte hebben.



Nu voegen we toe

aan hoek (h, k_1) het getal $\frac{1}{8} \cdot 180$,
aan hoek (h, k_2) het getal $\frac{2}{8} \cdot 180$,
...
aan hoek (h, k_7) het getal $\frac{7}{8} \cdot 180$.

Deze tweedeling kunnen we ad inf. voortzetten en op grond van continuïteits-overwegingen aan de overige representanten getallen toekennen.
Door g wordt aan elke hoekgrootte een representant toegevoegd en door f aan elke representant een reëel getal. Door $f \circ g$ wordt dus aan elke hoekgrootte een reëel getal toegekend.
Bij de definitie van f is ervan uitgegaan, dat aan de gestrekte representant het getal 180 toegevoegd wordt. In de notatie van de functie willen we dit tot uitdrukking brengen. We schrijven daarom liever f_{180} i.p.v. f. De functie, die op analoge wijze ontstaat, als we aan de gestrekte representant het getal p toevoegen, noteren we: f_p.
We zijn nu in staat aan de hoekgrootten namen te geven. We gaan daarbij eerst weer uit van de functie f_{180}. De hoekgrootte, waaraan door de functie f_{180} het getal a wordt toegevoegd, noemen we: a graden. Dus:

Definitie. $(f_{180} \circ g)^{\text{inv}}\ (a) \stackrel{\text{df}}{=} a$ graden.

We kunnen i.p.v. de functie f_{180} ook een andere functie kiezen uit de functies f_p. Men kan dan naar believen andere namen bedenken. Gangbaar zijn:

Definitie. $(f_{200} \circ g)^{inv}(a) \overset{df}{=} a$ centigraden,

$(f_{\pi} \circ g)^{inv}(a) \overset{df}{=} a$ radialen.

Ten slotte kunnen we van de hoekgrootten afdalen naar de hoeken zelf. Onder de grootte van hoek A verstaan we niets anders dan de ekwivalentieklasse uit de verzameling van de hoekgrootten, waarvan hoek A element is. Dus:

Definitie. Als hoek $A \in G$, waarin G een hoekgrootte is, dan zegt men dat G de *grootte van hoek A* is.

Uit deze definitie ziet men, dat 'de grootte van hoek A is a radialen' betekent: hoek $A \in a$ radialen.

Notatie. Er blijkt een essentieel verschil te zijn tussen de grootte van hoek A en de hoek A. De grootte van hoek A is b.v. een aantal radialen. De hoek A is echter een meetkundige figuur, We hebben dus twee notaties nodig:
a. een notatie voor hoek A als meetkundige figuur,
b. een notatie voor de grootte van hoek A.
Het is een veel voorkomend gebruik beide te noteren: $\angle A$. Dit is echter niet correct. De notatie $\angle A$ mogen we slechts voor een van de beide betekenissen reserveren. Hiervoor zou ik willen kiezen: de grootte van hoek A. We schrijven dus

$\angle A = a$ radialen

en bedoelen daarmee: de grootte van hoek A is gelijk aan a radialen.
In deze notatie is de grootte van hoek A een verzameling, namelijk een hoekgrootte. Ook is a radialen een verzameling, want per definitie is ook a radialen een hoekgrootte. Deze verzamelingen zijn gelijk. Hiermee is het gebruik van het gelijkteken in $\angle A = a$ radialen' gerechtvaardigd.
Nu moeten we nog een notatie hebben voor hoek A als meetkundige figuur. Wel, waarom zouden we een speciaal symbool hiervoor bedenken? Als we hoek A als meetkundige figuur bedoelen, zou ik willen schrijven: hoek A.

3. Lengten. Zoveel mogelijk hiermee analoog willen we de lengtemeting van lijnstukken analyseren.

Definitie. Twee lijnstukken *hebben dezelfde lengte*, als er een congruentie bestaat, waarbij het ene lijnstuk als beeld het andere heeft.

Definitie. Een *lengte* is een ekwivalentieklasse van de partitie, die de relatie 'heeft dezelfde lengte' in de verzameling van de lijnstukken teweeg brengt.

Uit elk van deze ekwivalentieklassen kiezen we een representant. Kies daartoe een gesloten halve lijn h met eindpunt O. Elk lijnstuk is congruent met een lijnstuk OP, waarvan $P \in h$. De lijnstukken OP $(P \in h)$ vormen dus een verzameling representanten van de lengten. De functie, die aan elke lengte zijn re-

presentant toevoegt, noemen we g.
Om lengtemeting mogelijk te maken gaan we aan deze representanten getallen toekennen. We ontwerpen een injectie f van deze representanten naar $\mathbb{R}$. Daartoe kiezen we op h een van O verschillend punt E. We maken h tot een getallenlijn (eigenlijk: halve getallenlijn die het beeld is van $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$), waarbij we aan O het getal 0 en aan E het getal 1 toevoegen. We definiëren f nu als de functie die aan elke representant OP het getal toevoegt, dat op de getallenlijn bij P hoort.
Door de functie $f \circ g$ is dan aan elke lengte een reëel getal toegevoegd.
Tot zover gaat alles best, maar nu komt de narigheid. We zouden nu aan de lengten namen willen toevoegen, dus definities willen opstellen van de vorm

$$(f \circ g)^{\text{inv}}(a) \overset{\text{df}}{=} \ldots.$$

In het voorgaande stond rechts van het $\overset{\text{df}}{=}$ -teken a graden Celsius, a graden Kelvin, a graden, a radialen, of iets dergelijks. Waar kwam deze toevoeging 'graden Celsius', 'radialen' vandaan? Onder alle mogelijke functies f werd door middel van een definitie een bepaalde uitgekozen en de aard van deze speciale functie werd dan aangeduid door 'graden Celsius' of door 'radialen'.

Bij de hoekmeting was het mogelijk een bepaalde functie f te definiëren. We konden onder de gekozen representanten er door middel van een definitie één van alle andere onderscheiden, namelijk de gestrekte representant. Door aan deze een bepaald getal toe te voegen werd een speciale functie f gedefinieerd. Deze gaf dan aanleiding tot een speciale benaming van de hoekgrootten. In een dergelijke gelukkige omstandigheid verkeren we bij de lengtemeting niet. Het is niet mogelijk door een definitie één bepaald lijnstuk uit de representanten te kiezen en aan dit speciaal gedefinieerde lijnstuk b.v. het getal 1 toe te kennen. Het enige, dat we kunnen beweren, is dat we aan een of andere representant het getal 1 kunnen toevoegen en dat dan (als we de bij de hoekmeting geschetste methode volgen) bepaald is welke getallen aan de overige representaten toegekend worden.
In de praktijk kunnen we de materie te hulp roepen en een bepaalde lengteëenheid materieel vastleggen. In de praktijk is het dan ook mogelijk definities te geven van de vorm

$$(f \circ g)^{\text{inv}}(a) \overset{\text{df}}{=} a \text{ centimeter.}$$

Zodra we van de fysische op de mathematische lengtemeting overgaan, ontbreekt deze mogelijkheid. Als we zo consequent mogelijk ons willen aansluiten bij de te voren gevolgde methode, zouden we in de wiskunde een definitie moeten geven van de vorm

$$(f \circ g)^{\text{inv}}(a) \overset{\text{df}}{=} a \text{ eenheden } OE.$$

Dit is echter geen gebruik. De wiskundige ziet af van het geven van namen aan

de lengten en volstaat met op te merken, dat door de functie $f o g$ aan elke lengte een maatgetal is toegekend.
Desondanks definieert men ietwat slordig:

Definitie. Als $p \in P$, waarin p een lijnstuk en P een lengte is, en $(f o g)(P) = a$, dan zegt men dat de *lengte van lijnstuk p* het getal a is (en bedoelt hiermee, dat het maatgetal van de lengte het getal p is).

Opmerking. De wiskundige ignoreert veelal de praktische oorsprong van zijn begripsvorming en slaagt er daardoor soms in vereenvoudigingen teweeg te brengen. We kunnen de ekwivalentieklassen overslaan en direct aan elk lijnstuk een getal toekennen (door keuze van een getallenlijn en transport van het lijnstuk naar deze lijn). In de schoolwiskunde zullen we dat zeker doen.
Ook bij de hoekmeting zouden we de ekwivalentieklassen kunnen overslaan en een functie definiëren, die aan elke hoek een getal toevoegt. Hier kunnen we echter weer expliciet definiëren, welke functie we onder de mogelijke functies kiezen. Kiezen we de functie, waarbij aan een gestrekte hoek het getal 180 wordt toegevoegd, dan is de grootte van een hoek b.v.: 45 onder deze toevoeging. Deze gecompliceerde zegswijze vervangen we door een meer eenvoudige, die per definitie hetzelfde inhoudt. We zeggen namelijk, dat de grootte van de hoek 45 graden is.

Notatie. Er blijkt een essentieel verschil te bestaan tussen de lengte van een lijnstuk AB en het lijnstuk AB. De lengte van een lijnstuk is een getal. Het is dus niet correct zowel het lijnstuk als de lengte ervan door AB voor te stellen. We hebben twee notaties nodig:

a. een notatie voor het lijnstuk AB als meetkundige figuur,
b. een notatie voor de lengte van het lijnstuk AB.

Deze laatste komt het meest in formules voor. Het lijkt me daarom aan te bevelen de lengte van het lijnstuk AB te noteren: AB. Hebben we het over de figuur, dan zou ik schrijven: lijnstuk AB.
Deze afspraak heeft een groot praktisch voordeel. In formules kan men met een minimaal aantal symbolen volstaan en behoeft men niet te schrijven AB, $l(AB)$ of iets dergelijks. Zou men afspreken, dat men het lijnstuk AB schrijft: AB, dan dreigt er soms misverstand te ontstaan als men ook de lijn door A en B met AB wil noteren. Dit misverstand wordt voorkomen door het expliciet te hebben over lijnstuk AB en lijn AB, waarna men zonder bezwaar de notatie AB kan reserveren voor de lengte van het lijnstuk.
Naar analogie hiervan zijn de notaties: hoek A voor de meetkundige figuur en $\angle A$ voor de grootte van de hoek voorgesteld.

4. Oppervlakte en inhoud. Een analyse van de betekenis van oppervlakte en inhoud is na het voorgaande niet meer nodig. Blijft over de vraag welke notatie aanbevelenswaardig is.
Ook hier zullen we weer onderscheid moeten maken tussen de notatie voor de meetkundige figuur en voor de oppervlakte resp. inhoud ervan. Naar analogie

van het voorgaande ligt het voor de hand b.v.

met 'vierhoek *ABCD*' de meetkundige figuur te bedoelen.

de oppervlakte van vierhoek *ABCD* te noteren: *ABCD*.

Vaak wordt deze oppervlakte genoteerd: O (*ABCD*). Inconsequent is de lengte van lijnstuk *AB* niet te noteren: l (*AB*), en de oppervlakte van vierhoek *ABCD* wel: O (*ABCD*). Bovendien is het onnodig lang. Vandaar de aanbeveling: *ABCD*.

Opmerkelijk is, dat voor een in de wiskunde veel gebruikt symbool, namelijk het symbool Δ voor 'driehoek', geen plaats meer is. Erg is dit niet, maar als men het wil blijven gebruiken, moet men natuurlijk zorgen er ook gemak van te hebben. Dit gemak heeft men niet, als men de oppervlakte van driehoek *ABC* noteert: Δ *ABC*. Men voegt dan een symbool toe, dat even goed weggelaten kan worden. Enige mogelijkheid is de meetkundige figuur aan te duiden met: Δ *ABC*, en dus het woord driehoek te vervangen door het symbool Δ . Men zal daar vaak gemak van kunnen hebben, b.v. in uitspraken als $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Ten slotte zullen we, als we deze lijn doortrekken, de meetkundige figuur voorstellen door viervlak *ABCD*, en de inhoud ervan door *ABCD* (en niet door I (*ABCD*)).

Samenvatting

notatie voor de figuur	notaties voor de lengte enz.
lijnstuk *AB*	*AB*
driehoek *ABC*	*ABC*
viervlak *ABCD*	*ABCD*
hoek *A*	$\angle A$

Soms worden lijnstukken voorgesteld door een enkele kleine letter. En ook worden hoeken wel voorgesteld door een enkele griekse letter. Zonder nadere afspraak verkeren we weer in het onzekere of men hier het lijnstuk en de hoek mee bedoelt of de lengte van het lijnstuk en de grootte van de hoek. Het ligt voor de hand af te spreken, dat het laatste het geval is. In formules kan men zich dan kort uitdrukken. Vgl. de eenvoudige formulering van de cosinusregel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma .$$

5. Om de beschouwingen aanvankelijk niet onnodig te compliceren, zijn een paar essentiële eigenschappen van grootheden totnogtoe buiten beschouwing gelaten.

Er is gezegd, dat een verzameling ekwivalentieklassen een grootheid is, als door één injectie aan de elementen van de verzameling reële getallen toegevoegd zijn. Dit is onvolledig. De toevoeging geschiedt niet in het wilde weg. Essentieel is, dat de ekwivalentieklassen voor de toevoeging reeds op de een of andere manier geordend zijn en dat de toevoeging zodanig is, dat de ordening van de ekwivalentieklassen overeenkomt met de ordening van de eraan toegevoegde getallen.

Om dit duidelijk te maken, bekijken we eerst nogmaals het voorbeeld betreffende de temperatuur.
We zeggen, dat een voorwerp a_1 *warmer* is dan een voorwerp a_2 is als na de voorwerpen in contact gebracht te hebben er warmteoverdracht van a_1 naar a_2 plaats heeft.
We zeggen, dat de temperatuur t_1 *hoger* is dan de temperatuur t_2, als voor elke $a_1 \in t_1$ en $a_2 \in t_2$ geldt: a_1 is warmer dan a_2. (Een fysische eigenschap is, dat als het voorgaande geldt voor een $a_1 \in t_1$ en $a_2 \in t_2$, het voor elke $a_1 \in t_1$ en $a_2 \in t_2$ geldt.)
Onderstel nu, dat h een injectie is, die aan temperaturen reële getallen toevoegt. Aan deze functie h stellen we de eis:

$$t_1 \text{ is hoger dan } t_2 \Rightarrow h(t_1) > h(t_2).$$

Dit geeft ons aanleiding onze definitie van een grootheid te verscherpen.

Definitie. Een *grootheid* is een geordende verzameling ekwivalentieklassen, waaraan door een injectie reële getallen toegevoegd zijn op een zodanige manier, dat de ordening van de ekwivalentieklassen overeenkomt met de ordening van de eraan toegevoegde reële getallen.

Ook lijnstukken kan men ordenen zonder daarbij terug te grijpen op de definitie van lengte, en wel als volgt.

Definitie. Men zegt, dat lijnstuk a_1 *langer* is dan lijnstuk a_2, als lijnstuk a_2 congruent is met een echt deel van lijnstuk a_1.

Definitie. Men zegt, dat lengte l_1 *groter* is dan lengte l_2, als voor elke $a_1 \in l_1$ en $a_2 \in l_2$ geldt: a_1 is langer dan a_2.

En ten slotte blijkt nu

$$l_1 \text{ is groter dan } l_2 \Rightarrow h(l_1) > h(l_2),$$

waarin h de injectie is, die aan elke lengte een reëel getal toevoegt.

Hoeken kan men analoog behandelen. Vat men een hoek op als een gesloten deel van het platte vlak, dan kan men zelfs precies dezelfde redenering volgen.

Rekenen met grootheden. Soms kan men nog verder gaan met het stellen van eisen aan de functie h. We kunnen een optelling van lengten definiëren zonder daarbij gebruik te maken van de functie h.

Definitie. Onder de *som* van de lengte van lijnstuk AB en de lengte van lijnstuk CD verstaan we de lengte van een lijnstuk PQ, dat de volgende eigenschap heeft: er bestaat een punt $R \in$ lijnstuk PQ zo, dat lengte van lijnstuk PR = lengte van lijnstuk AB en lengte van lijnstuk RQ = lengte van lijnstuk CD.

Aan de functie h zal men nu de eis stellen:

$$h\,(\text{lengte van lijnstuk } AB) + h\,(\text{lengte van lijnstuk } CD) = \\ = h\,(\text{lengte van lijnstuk } PQ).$$

Dit is echter geen essentieel kenmerk van grootheden. De optelling van hoeken b.v. is slechts in beperkte mate mogelijk. De optelling van temperaturen kan niet zo gedefinieerd worden, dat de som van de h-beelden gelijk is aan het h-beeld van de som. Dit blijkt direct, als men verschillende temperatuurschalen vergelijkt. Zo is

$$10°\,C = 283°K \quad \text{en} \quad 20°\,C = 293°\,K,$$

echter niet

$$(10 + 20)°\,C = (283 + 293)°\,K.$$

Zou men dus los van een eventuele h een optelling van temperaturen definiëren, dan zou deze optelling niet kunnen corresponderen zowel met de functie h, die de Celsius-schaal teweegbrengt als met de functie h, die de Kelvin-schaal doet ontstaan. Uit het feit, dat beide schalen gebruikt worden, volgt, dat geen optelling van temperaturen los van een injectie h gedefinieerd is.

Ten slotte de vermenigvuldiging. Is eenmaal een optelling gedefinieerd, dan ligt daarmee vast, wat men verstaan wil onder vermenigvuldiging met een rationaal getal. Zo is

$1 \cdot a = a$
$p \cdot a$ = de som van p termen a $(p \in \mathbb{Z}^+, p \neq 1)$
$\frac{p}{q} \cdot a$ = het getal, dat met q vermenigvuldigd $p \cdot a$ als uitkomst levert $(p \in \mathbb{Z}^+, q \in \mathbb{Z}^+)$

en als men wil kan men ook de factor 0 en de negatieve rationele factoren erbij betrekken.
Heeft men dus een optelling van grootheden gedefinieerd die correspondeert met de optelling van de door h eraan toegevoegde reële getallen, dan is men zeker, dat deze correspondentie ook gewaarborgd is voor de vermenigvuldiging met een rationaal getal. Continuïteitsoverwegingen maken het mogelijk deze correspondentie uit te breiden over irrationale factoren[1]).
Dit is van belang, als men zich na het voorgaande gaat afvragen, wat men dient te verstaan onder b.v. $\frac{1}{2} \angle A$. Moet men nu een hoekje nemen, waarvan de grootte gelijk is aan $\angle A$, deze hoek middendoor delen (dus in twee congruente delen verdelen) en daarna van een van de verkregen delen de grootte nemen? Of moet men het getal, dat door h aan $\angle A$ toegevoegd wordt, met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen en daarna de hoekgrootte nemen, die bij het zo verkregen maatgetal hoort? Voordat het u gaat duizelen, kan ik op grond van het voorgaande met de plezierige verzekering komen, dat dit er niet toe doet.

1) We weten, dat h een injectie is, waarbij de ordening van de grootheden correspondeert met de ordening van de beelden. Voor het effectief worden van de continuïtsoverwegingen is daarom voldoende, dat het bereik van h hetzij $\mathbb{R}$ hetzij een interval is.

De Nederlandse Wiskunde Olympiaden

Een enquête[1]

1 Aard en omvang van de gehouden enquête

Op verzoek van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde hebben Dr. D.N. van der Neut te Zeist en Dr. Joh.H. Wansink te Arnhem, beiden oud-lid van de commissie, een onderzoek ingesteld naar de studiekeuze, de studieresultaten en de maatschappelijke functies van de 100 prijswinnaars van de Wiskunde-Olympiaden uit de jaren 1962-1971.

Op 1 september 1972 werd er ter voorbereiding van de te houden enquête een verzoek om inlichtingen gericht tot de rectoren van de scholen waarvan de prijswinnaars leerlingen waren geweest. Op 1 oktober 1972 werden de enquêteformulieren aan de winnaars verzonden.

Voor de inhoud van de aan rectoren en winnaars gezonden formulieren verwijzen wij naar Bijlage I, 1-2[1]

Van alle rectoren werd antwoord ontvangen; 92 van de 100 winnaars hebben het enquêteformulier ingevuld teruggezonden. Voor de ruime medewerking aan de enquête verleend zijn de beide enquêteurs rectoren en winnaars dank verschuldigd.

1 Zie opmerkingen van de Redactie onder dit artikel.

2 Ter toelichting moge dienen dat de olympiaden gespeeld worden in twee ronden. Het deelnemen aan de eerste ronde, die in het voorjaar wordt gehouden, staat open voor de leerlingen van de op een na hoogste klas, dus klas 5 gymnasium resp. klas 4 h.b.s. Deze eerste ronde wordt gehouden in de scholen.
Op grond van de bij de eerste ronde behaalde hoogste resultaten worden ongeveer 60 deelnemers uitgenodigd aan de tweede ronde deel te nemen. Deze wordt centraal gehouden in het najaar.
Winnaars zijn de 10 deelnemers met in totaal de hoogste resultaten.

2 Spreiding van de winnaars

2.1 *Spreiding over het land*

De 100 winnaars uit de jaren 1962-1971, tien per jaar, blijken als volgt over de provincies verdeeld te zijn:

Noordholland	29(31)	Drente	3(2)
Zuidholland	27(21)	Limburg	3(6)
Noordbrabant	14(9)	Overijssel	3(4)
Gelderland	9(9)	Zeeland	2(2)
Utrecht	6(7)	Friesland	0(4)
Groningen	4(5)		

De getallen tussen haken, die alle procenten voorstellen, hebben betrekking op het aantal deelnemers aan de tweede ronden van de in de jaren 1962-1966 gehouden wedstrijden. We beschikten over de volledige naamlijsten van de deelnemers aan de tweede ronden van deze jaren. Hun aantal was 305; per jaar werden er ongeveer 60 deelnemers opgeroepen, geselecteerd op grond van de resultaten behaald in de eerste ronde.[2]
De eerste kolommen betekenen tegelijkertijd absolute getallen en procenten, omdat hier het totaal aantal deelnemers 100 bedroeg.

We vatten de gegeven opsomming als volgt samen.
De aantallen winnaars bedroegen procentueel:

a	in het westen van het land (Noord- en Zuidholland):	56(52);
b	in het zuiden van het land (Noordbrabant, Limburg, Zeeland):	19(17);
c	in het midden van het land (Utrecht, Gelderland, Overijssel):	18(20);
d	in het noorden van het land (Groningen, Friesland, Drente):	7(11).

We zien uit deze cijfers, hoezeer de deelname uit het westen van het land naar voren springt. Voor een verantwoorde waardering van de gegeven cijfers is het echter noodzakelijk rekening te houden met het aantal inwoners van de diverse provincies. We geven daarom in onderstaande tabel aan welk procent van de Nederlandse bevolking in de onderscheiden provincies woont.

Noordholland	17	Drente	3
Zuidholland	23	Limburg	8
Noordbrabant	14	Overijssel	7
Gelderland	12	Zeeland	2
Utrecht	6	Friesland	4
Groningen	4		

Uit deze opsomming blijkt dat Noord- en Zuidholland de enige provincies zijn die meer winnaars hebben opgeleverd dan men op grond van het aantal inwoners

alleen zou mogen verwachten. In Gelderland, Limburg, Overijssel en Friesland blijft het aantal winnaars achter bij het aantal dat men op grond van het aantal inwoners alleen zou mogen verwachten.
Geheel ondubbelzinnig is deze verdeling over de provincies echter niet. Een winnaar uit Drente bijvoorbeeld die leerling is aan een school te Groningen wordt bij deze laatste provincie gerekend, niet bij de eerste.

2.2 *Spreiding over scholen en schooltypen*
In bijlage II is de spreiding van de 100 winnaars over scholen en schooltypen gedetailleerd opgegeven. De totstandkoming van tal van scholengemeenschappen heeft er toe geleid dat een aantal vermelde namen niet meer in overeenstemming is met de huidige namen van de desbetreffende scholen.
Er kwamen:

4 winnaars van het Vossiusgymnasium te Amsterdam;
3 winnaars van het St. Bonifatiuslyceum te Utrecht,
van het Christelijk Lyceum 'De Populier' in Den Haag,
van het St. Odulphuslyceum te Tilburg,
van het Lorentzlyceum te Eindhoven,
van het Lyceum Augustinianum te Eindhoven;
2 winnaars van het Christelijk Lyceum te Amsterdam-Buitenveldert,
van het St. Nicolaaslyceum te Amsterdam,
van het Charloise Lyceum te Rotterdam,
van de Christelijke H.B.S. te Assen,
van het Gymnasium Camphusianum te Gorinchem,
van het St. Michielslyceum te Geleen,
van het Christelijk Lyceum 'Marnix van St. Aldegonde' te Haarlem,
van het St. Werenfriduslyceum te Hoorn,
van de Rijksscholengemeenschap Kamerlingh Onnes te Groningen.

De overige 63 scholen leverden elk één winnaar.

Opmerking verdient nog het bijzondere feit, dat er één gymnasiumleerling is geweest die er in slaagde in twee opeenvolgende jaren winnaar te worden, de eerste keer als nummer 5, de tweede keer als nummer 4. Dit was mogelijk omdat hij de eerste keer reeds vanuit de vierde klas aan de olympiade heeft deelgenomen.
Voorts is er één gezin waaruit in twee verschillende jaren een winnaar is gekomen.

De verdeling van de winnaars over de schooltypen voor wat het bevoegd gezag van de scholen betreft is als volgt te geven:

rijksscholen	5
gemeentelijke scholen	25
bijzonder neutrale scholen	10
protestants christelijke scholen	27
rooms-katholieke scholen	33

3 Studieresultaten en maatschappelijke functies

3.1 *Studiekeus, afgelegde examens*

Voor 4 van de 100 winnaars zijn de studieresultaten en de eventuele maatschappelijke functies op grond van de binnengekomen inlichtingen niet nauwkeurig aan te geven.

Van de 96 overigen werden er in eerste instantie 75 ingeschreven aan een universiteit, 21 aan een hogeschool. In de regel was dit een der Technische Hogescholen; drie van de inschrijvingen hadden plaats aan resp. de Nederlandse Economische Hogeschool te Rotterdam, de Landbouwhogeschool te Wageningen en de Katholieke Theologische Hogeschool te Amsterdam.

Bijna alle inschrijvingen aan universiteiten hadden plaats in de faculteit der wiskunde en natuurwetenschappen; één der winnaars studeerde echter voor arts. Drie van de winnaars studeerden eind 1972 nog aan een buitenlandse universiteit of hogeschool.

In Bijlage III geven we een overzicht van de bereikte studieresultaten.
Het is duidelijk dat men van de latere jaren minder examens mag verwachten dan van de beginjaren. De cijfers uit de verschillende jaren zijn daardoor niet rechtstreeks vergelijkbaar. Het alleen maar verstrekken van totaalcijfers over de 10 jaren zou daarom een weinig zinvolle informatie betekenen. De jongste jaargang (olympiade 1971, begin van de universitaire studie 1972) is nog maar nauwelijks aan de slag en kan daardoor weinig anders meedelen dan de gedane studiekeus. Voor de oudste generatie (olympiade 1962, begin van de universitaire studie 1963) zijn er uiteraard meer voltooide studies te verwachten, maar van de 9 jaren die er sindsdien verstreken zijn is voor menigeen de tijd doorgebracht in militaire dienst voor de studie verloren gegaan.

We onderscheiden in het overzicht van Bijlage III drie perioden:

I. de jaren 1962-1965 (40 winnaars);
II. de jaren 1966-1969 (40 winnaars);
III. de jaren 1970-1971 (20 winnaars).

Overzicht	I	II	III
a ingeschreven als student	39	37	20
b gepromoveerd	2		
c tot en met doctoraal examen	21	3	
d tot en met kandidaatsexamen	9	20	
e alleen propaedeutisch examen	3	4	1
f geen examen afgelegd	3	10	19
g buitenlandse universiteit (examens niet bekend)	1		

Opmerkingen
1 Een der 'kandidaatsexamens' werd afgelegd aan een buitenlandse universiteit.
2 Onder f werden alleen de academische examens beschouwd; m.o. examens zijn buiten beschouwing gelaten.
3 Een der onder d bedoelden was een exchange rotary student aan een Amerikaanse high school die ginds aan een 'olympiade' deelnam en de 1% topscore haalde.

Afzonderlijke aandacht dienen we te besteden aan de examens en promoties cum laude. In Bijlage III vinden we ze tussen haken aangegeven. Hierbij is cumulatief te werk gegaan: voor de betrokkenen zijn de bij vorige examens verkregen predikaten cum laude meegeteld. Zo betekent in de tweede rij in de bijlage 2(6) dat de beide gepromoveerden bij het kandidaatsexamen, bij het doctoraalexamen èn bij de promotie het predikaat cum laude verwierven.

'Cum laude' werd verkregen:
a door 2 promovendi;
b door 11 doctorandi;
c door 14 kandidaten.
Twee winnaars kregen het driemaal, zes winnaars tweemaal, negen éénmaal.

Er werd in de jaren 1962-1971 totaal 27 keren 'cum laude' gegeven. Uit de rechterkolom in bijlage III zou een totaal van 28 volgen. Dit komt doordat één der prijswinnaars uit 1968 ook winnaar werd in 1969, waardoor ter plaatse zijn 'cum laude' bij het kandidaatsexamen dubbel in rekening kon worden gebracht.

De kandidaten met cum laude behaalden deze graad gemiddeld na een studie van 2 jaar, 0 maand, de overige kandidaten na een studie van 3 jaar, 10 maand. De doctorandi met cum laude behaalden deze graad gemiddeld na een studie van 5 jaar, 0 maand; de overige doctorandi na een studie van 6 jaar, 4 maand. De beide promovendi behaalden de doctorstitel gemiddeld 6 jaar en 8 maand na hun eerste inschrijving als student.

3.2 *Veranderingen van studieplan*
Het is begrijpelijk dat niet alle winnaars de universitaire studie waarvoor zij zich in eerste instantie lieten inschrijven hebben voltooid. Van de 96 ingeschrevenen aan universiteit of hogeschool zijn er 11 van studierichting veranderd terwijl van 5 bekend is dat ze hun academische studie definitief hebben willen staken.
Geheel zeker is dit laatste nooit. Vaak toch bestaat de kans dat de beoogde 'staking' in feit uitloopt op een kortere of langere 'onderbreking'.

Als studierichtingen van tweede keus noteerden we:
a farmacie;
b economie en econometrie;
c rechten;

d agrarische wetenschappen (Wageningen);
e filosofie;
f wiskunde alleen, ter vervanging van wiskunde met theologie;
g studie voor middelbare akten (nederlands, wiskunde).

3.3 *Maatschappelijke functies*
Ten aanzien van de maatschappelijke functies is er nog voor geen enkele jaargroep sprake van consolidatie. Voorzover er al enige functies uitgeoefend zijn, hebben deze zo goed als steeds een tijdelijk karakter.

We noteerden:

a	wetenschappelijk medewerker aan de universiteit of hogeschool	9 maal;
b	leraarsfuncties	9 maal;
c	assistentschappen	8 maal;
d	diverse administratieve functies	5 maal;
e	programmeur	3 maal;
f	bestuurslid studentenraad	1 maal;

Verdere functies:
ingenieur; assistent accountant; chef materiaalvoorziening; soft ware specialist; systeemanalist.

Van de 4 winnaars die meedeelden hun studie te hebben gestaakt werd er één programmeur, één chef materiaalvoorziening, één secretaris jeugdwerk studentenvereniging, één schoolbestuursadviseur.

Maar zoals we reeds opmerkten, het staat niet overal vast, dat deze staking definitief zal blijken te zijn..

4 Eindexamenresultaten

4.1 *Algemene indruk van de behaalde scores*
Uiteraard mogen we verwachten, dat leerlingen die op de wiskunde-olympiaden tot zulke topprestaties in staat bleken, ook voor andere vakken met gunstige resultaten uit de bus zouden komen. Deze verwachtingen worden door de in feite op de eindexamens geleverde prestaties bevestigd. Toch zal in 4.3 bij de beschouwing van enige defecten blijken, dat voor enkele winnaars het verwachte diploma nog niet aanstonds veilig was. Een verklaring voor de ontstane defecten zou voor ieder van de betrokkenen een afzonderlijk onderzoek eisen, dat buiten het bestek van deze enquête valt.

Eén opmerking van algemene aard willen we echter hier nog maken in verband met het feit dat in 1972 voor sommige studierichtingen een verplichte loting werd ingevoerd bij de toewijzing van beschikbare plaatsen. 22 van de 100 winnaars haalden geen examengemiddelde van 7,5; voor twee jaargroepen steeg het groepsgemiddelde hier niet bovenuit.

Het zou ons een schrale 'beloning' geleken hebben voor leerlingen die in staat gebleken waren voor de topprestaties van een wiskunde-olympiade als hun toch de toegang tot de universiteit vooralsnog zou zijn ontzegd.

4.2 *De wiskunde-cijfers tegenover de gemiddelden voor alle vakken*
Er waren 98 eindexamenlijsten beschikbaar, 57 ervan hadden betrekking op gymnasiale eindexamens (waarvan één 'nieuwe stijl') 40 op het eindexamen h.b.s., 1 op het eindexamen atheneum (examens 'nieuwe stijl', met wiskunde I en wiskunde II). Dit laatste examen is bij de eindexamens h.b.s. ondergebracht.
De examencijfers van de ene winnaar die in 1965 vanuit de vijfde klas van het gymnasium staatsexamen deed, één van de twee reeds gepromoveerden, waren: voor wiskunde 9 2/3, totale lijst 7,5.

Hier volgt een overzicht van de gemiddelden per jaargroep voor de wiskunde en voor het vakken totaal.

wiskunde	gymn.	8,8	9,8	9,2	9,2	8,7	9,4	8,9	8,6	9,2	9,0	eindgemiddelde 9,1
	h.b.s.	9,0	9,6	9,2	9,0	9,3	9,2	9,6	9,6	8,8	9,4	,, 9,3
totale lijst	gymn.	7,7	7,9	7,8	7,7	7,9	7,6	8,0	7,4	7,2	8,3	eindgemiddelde 7,7
	h.b.s.	8,1	8,3	8,2	8,1	7,8	7,9	8,2	8,2	7,4	8,0	,, 8,0

Bij de beoordeling van de cijfers voor de h.b.s. tegenover die van het gymnasium dient men er rekening mee te houden, dat het systeem der 'vrijstellingen', dat alleen voor de h.b.s. geldt, van invloed kan zijn op de behaalde eindcijfers. Een leerling van de h.b.s. die op het schriftelijk examen hoge cijfers voor wiskunde krijgt, loopt geen gevaar meer dit cijfer door een verplicht mondeling examen lager te zien worden. De leerling van het gymnasium staat wel aan dit 'gevaar' bloot.
Nemen we dit in aanmerking, dan mag men besluiten, dat de niveaus voor de wiskunde op de beide schooltypen maar weinig verschil hebben getoond.

4.3 Defecten

4.3.1 *Eindexamens h.b.s.*
Tien winnaars met einddiploma h.b.s. hadden een examenlijst met enig defect, d.w.z. met een of meer cijfers uit de eindexamenvakken lager dan 6.
Hieronder vermelden we de ontstane defecten met in de rechterkolom het totaal van de 13 cijfers, het totale defect, en een r voor hen die reglementair geslaagd zijn, een + voor hen die geslaagd zijn maar niet reglementair.

	A	St	AM	N	S	B	N	F	E	D	St	A	G		
1				5				5		5				88^{3}	+
2						5			5					88^{2}	r
3						4								99^{2}	+
4						5								99^{1}	r
5											4			106^{2}	+
6				4			5							101^{3}	+
7									5					101^{1}	r
8						5								98^{1}	r
9								5						89^{1}	r
10										5				96^{1}	r

6 van deze tien gevallen hebben geleid tot reglementaire toelating, 4 kwamen er in bespreking, de nummers 1, 3, 5, 6.
De toekenning van het diploma was in geen van deze gevallen in gevaar.

4.3.2 *Eindexamens gymnasium*

We perken hier de lijst van de defecten enigszins in door van de 14 deelcijfers de 3 cijfers voor nederlands doorgaans door het groepscijfer te vervangen. De vergelijking met de h.b.s.-lijsten wordt daardoor iets eenvoudiger.

		G	L	N	F	E	D	Al	St	AM	N	S	B		
1		5												47	r
2					5									45	r
3		5	6											42	r
4					5									42	r
5		6	5.											39 1/3	r
6		4												42 2/3	+
7					5									48	r
8			5											45 1/3	r
9			5											45 1/3	r
10					5									47 2/3	r
11						5	5							45	r
12				5 2/3										42 2/3	r
13						5	4							44 1/3	r
14		6	5											43	r
15		6	4	649	4	5						5	5	36 1/3	-
16					5							5	5	39 2/3	+
17		4	6	656			5							37 1/3	+
18				566		5								40 1/3	r
19		5	6	556										41	+
20						5								44 2/3	r

15 van deze 20 kandidaten konden reglementair worden toegelaten. De nummers 6, 15, 16, 17 en 19 kwamen voor bespreking in aanmerking.

Kandidaat 15 werd afgewezen, hij slaagde een jaar later na de zesde klas te hebben gedoubleerd.

Bijzondere aandacht verdienen in deze lijsten de nummers, 3, 5, 14 en 19, waarin voor een der klassieke talen een niet-voldoende cijfer werd genoteerd, terwijl het cijfer voor de tweede klassieke taal een 6 was. Was het cijfer voor deze tweede taal één punt lager geweest, en na eventueel verlengd examen lager gebleven, dan zouden de kandidaten reglementair zijn afgewezen, onafhankelijk van de hoogte van de andere cijfers.

In bovenstaande tabel is in de rechter kolom de som van de 6 groepscijfers vermeld, terwijl er een r is gezet in de gevallen van reglementaire toelating, een + bij toelating maar niet reglementair, een – bij afwijzing.
Bij de binnengekomen cijferlijsten liep de volgorde van de diverse vakken enigszins uiteen. Daardoor is er hier en daar enige onzekerheid ontstaan over de plaats van de cijfers bij de moderne talen. Het totale beeld van de desbetreffende lijsten heeft hierdoor echter niet geleden.
Beschouwen we de defecten voor hbs en gymnasium samen dan blijkt het aantal beperkt te zijn gebleven tot 4% van het totaal aantal eindexamencijfers van de desbetreffende kandidaten.

4.4 *Leeftijden*

Bij een beoordeling van de op de wedstrijden geleverde prestaties is ook de leeftijd van de winnaars een factor van betekenis.

We berekenden de gemiddelde leeftijden voor de jaargroepen; de gemiddelden zijn in jaren en maanden, waarbij het getal vóór de punt het aantal jaren en het getal er achter het aantal maanden aangeeft, dus bijv. 17.1 betekent leeftijd 17 jaar en 1 maand;
17.1; 17.1; 17.1; 17.3; 17.5; 17.5; 17.4; 17.0; 17.3; 16.11;
De gemiddelde leeftijd voor alle winnaars samen was 17 jaar en 2 maand.

Beschouwen we de winnaars met einddiploma hbs en de winnaars met einddiploma gymnasium afzonderlijk, dan zijn die gemiddelden 17 jaar en 1 maand voor de hbs en 17 jaar en 3 maand voor het gymnasium. In verband met de omstandigheid dat het gymnasium één jaarklasse meer telde dan de hbs vallen deze gemiddelden voor het gymnasium gunstig uit.
De jongste in de tien jaren was 15 jaar, 0 maand. De oudste 19 jaar en 1 maand. Deze laatste was nummer één van zijn groep; drie maal was echter nummer één van de groep tevens de jongste!

5 **Betekenis van de wiskunde-olympiaden voor de prijswinnaars**

5.1 *Bedoelingen van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde*

De N.O.C. voor Wiskunde had met de organisatie van de jaarlijkse wedstrijden o.m. de volgende bedoelingen:

1 ze wilde de leerlingen van het v.h.m.o. tot wiskundestudie animeren;
2 ze hoopte jeugdige talenten op wiskundig gebied tijdig te ontdekken;
3 ze wenste topprestaties te honoreren;
4 ze streefde ernaar onder jongelui van goede aanleg de keuze van een wiskundig beroep te propageren.

De onverwacht grote deelname aan de wedstrijden met aantallen van enkele duizenden is een symptoom van de grote belangstelling voor de wiskunde bij de Nederlandse jeugd. Uit de ingekomen antwoorden is gebleken, dat tal van leerlingen door hun succes bij de wedstrijden tot voortgezette wiskundestudie en tot de keus van een wiskundig beroep zijn gestimuleerd. Uit die antwoorde komt naar voren, dat tal van winnaars door hun succes meer zelfvertrouwen hebben gekregen, terwijl anderen bij aanvankelijke twijfel tussen twee studierichtingen ertoe gekomen zijn de wiskundige richting te kiezen.
De lage leeftijden van de meeste prijswinnaars demonstreren dat vele jeugdige talenten door de wedstrijden naar voren konden komen.

Wat tenslotte de 'honorering' van de topprestaties betreft, deze is in het materiële vlak bescheiden geweest: de winnaars kregen enige boeken op wiskundig gebied ten geschenke aangeboden.
Aan deze uitreiking werd een bijzonder cachet gegeven doordat ze plaats vond op het departement van onderwijs en wetenschappen te 's-Gravenhage.
Belangrijker dan de materiële honorering was de officiële waardering waartoe de prijsuitreiking leidde: op ondubbelzinnige wijze kwam vast te staan dat men had uitgeblonken in een landelijke wedstrijd op wiskundig gebied door het oplossen van problemen van hoog niveau.

5.2 *Over de beantwoording van een paar enquêtevragen*
De vraag of de adspirant-deelnemers in schoolverband enigermate werden voorbereid op de olympiade werd vrijwel unaniem ontkennend beantwoord. Enkele rectoren lieten de vraag onbeantwoord, een paar rectoren beantwoordden de vraag bevestigend, zij het met een beperking zoals 'nauwelijks'.
Over de aard van de voorbereiding werd vermeld: 'spelen met wiskunde', 'de proef-olympiade werd doorgenomen'.

De vraag aan de winnaars of het feit dat men behoord had tot de topploeg op enigerlei wijze van invloed geweest was op de keuze van studierichting of maatschappelijke functie werd door 86 van hen beantwoord, door 62 ontkennend.
Verwonderlijk is dit achteraf beschouwd niet. De meeste prijswinnaars zullen door hun uitblinken op de wiskundelessen op school reeds vroegtijdig ervaren hebben, c.q. hebben kunnen vermoeden, in hun kring tot zeer goede prestaties in staat te zijn. Voor velen van hen stond daardoor de studiekeus reeds vast.
24 van de winnaars beantwoordden de gestelde vraag bevestigend. Ze wezen erop, dat het wedstrijdsucces hun zelfvertrouwen ten aanzien van mogelijk succes bij

een wiskundige studie had versterkt, dan wel aan nog bestaande twijfel een einde had gemaakt.
De omstandigheid, dat toch nog een aantal winnaars na een of meer jaren van academische studie van studierichting wenste te veranderen dan wel de studie staakte is overigens een bewijs voor het feit dat het wedstrijdsucces niet steeds heeft kunnen leiden tot een blijvend bevredigende studiekeuze.
Een van de winnaars laat in een uitvoerig commentaar bij de beantwoording van de gestelde vraag uitkomen dat de wedstrijd destijds zijn 'vakidiotisme' bevorderd heeft, en dat het besteden van veel vrije tijd aan het oplossen van gestelde problemen ten koste kan gaan van een vorming op sociaal en politiek gebied.
Hij zou gaarne de activiteiten van de Onderwijscommissie in deze zin omgebogen zien.

Een ander die de vraag bevestigend beantwoordt verklaart dat hij blij is ondanks het succes bij de wedstrijd niet tot een zuiver wiskundige studie te hebben besloten; hij koos tropische cultuurtechniek in Wageningen.

De enige winnaar die bij het eindexamen werd afgewezen deelt mee, dat zijn ambitie op wiskundig gebied mede door de olympiade zo groot was geworden dat aan andere vakken geen aandacht meer werd besteed. Hij behaalde het volgend jaar zijn einddiploma

Opmerkingen van de Redactie van Euclides

1 De Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde heeft op 22 februari 1973 het officiële verslag van de gehouden enquête toegezonden aan allen die gegevens ervoor beschikbaar hadden gesteld: rectoren en winnaars.
2 Van de drie aan het verslag toegevoegde bijlagen is Bijlage I hier door ons niet overgenomen. Op de in deze bijlage afgedrukte formulieren aan rectoren en winnaars werd o.a. gevraagd naar de cijferlijst van het eindexamen, naar studierichting en studieresultaten nà het verlaten van de school en naar eventueel reeds beklede maatschappelijke functies.
In Bijlage II wordt een overzicht verstrekt van de scholen waarvan de prijswinnaars leerlingen waren, van het jaar van de desbetreffende olympiade en van het schooltype: rijksscholen, gemeentelijke scholen, bijzonder neutrale scholen, protestants-christelijke scholen, rooms-katholieke scholen. Bijlage III bevat een gedetailleerd overzicht van de studieresultaten. Bijlage II en bijlage III nemen we hieronder over.

Spreiding van de winnaars over de scholen

Bijlage II

		62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	R	G	N	C	K
A'dam 15	Vossius gymn.		1		2		1						4			
	Chr.Lyc.Buitenv.						1		1						2	
	St. Nicolaas lyc.		1							1						2
	Amsterd.lyc.		1											1		
	Cartesius lyc.		1										1			
	St. Ignatius coll.			1												1
	Barlaeus gymn.			1									1			
	Montessori lyc.				1									1		
	Spinoza lyc.	1											1			
	Vondelgymn.			1									1			
Den Haag 9	Chr.Lyc.Populier				1	2									3	
	Chr.Lyc.Zandvliet					1									1	
	Sch.Gem. "Hugo de Groot"								1				1			
	Eerste Vr.Chr.Lyc.						1								1	
	Dalton Lyc.		1										1			
	Aloysius coll.	1														1
	Grotius lyc.					1							1			
R'dam 8	Charloise Lyc.	1		1									2			
	Montfort Lyc.	1														1
	Rotterd.Lyc.			1										1		
	Caland Lyceum					1							1			
	Gymn.Erasmianum									1			1			
	Marnix gymn.										1				1	
	Geref.Scholengem.									1					1	
Eindhoven 8	Lorentzlyc.	1			1		1							3		
	St. Joris Lyc.	1														1
	Lyc.Augustin.					1		1		1						3
	Protestants Lyc.						1								1	
Groningen 4	Dalton Lyceum	1											1			
	Zernike Lyceum								1				1			
	Rijks sch.gem.		1							1		2				
Hilversum 3	Nieuwe Lyceum				1									1		
	Chr.Lyceum					1									1	
	Gem.gymn.							1					1			

		62	63	64	65	66	67	68	69	70	71		R	G	N	C	K
	St.Vitus lyc.						1										1
Bussum	Willem de Zwijgerlyc.								1							1	
3	Goois lyceum								1						1		
Tilburg	St.Odulphuscoll.	1						1			1						3
3																	
Utrecht	St.Bonifatius lyc.			1		1				1							3
3																	
Assen	Chr.Scholengem.								1		1					2	
2																	
Gorinchem	Gymn. Camphus.							1	1					2			
2																	
Geleen	St.Michiel lyc.								1		1						2
2																	
Zeist	Eerste Chr.Lyceum		1													1	
2	Lyc.Schoonoord							1					1				
Nijmegen	Canisius coll.				1												1
2	Dominicus coll.										1						1
Haarlem	Chr.Lyc.M.v.St.Aldeg.				1	1										2	
2																	
Hoorn	Sch.gem.Werenfr.								1	1							2
2																	
Velsen	Gymn. Paulinum			1													1
IJmuiden	Pr. Bernh. Coll.										1					1	
2																	
Middelb. 1	Sted.gymn.				1									1			
Goes 1	Chr.lyc.			1												1	
Dordrecht 1	Chr.lyc.										1					1	
Venray 1	Lyc. voor jongens		1														1
Wageningen 1	Wag.Lyceum									1			1				
Arnhem 1	Chr.Lyceum				1											1	
Aalten 1	Chr.hbs						1									1	
Zutphen 1	Baudartiuscoll.					1										1	
Apeldoorn 1	Kon.hbs	1												1			
Druten 1	hbs Pax Christi								1								1

		62	63	64	65	66	67	68	69	70	71		R	G	N	C	K
Amersfoort 1	Corderius coll.										1					1	
Hengelo 1	Sch.gem.Bat.Kamp										1			1			
Zwolle 1	Th. a Kempis coll.										1						1
Emmeloord 1	Prof. ter Veen Lyc.							1						1			
Oss 1	Titus Brandsma coll.					1											1
Leiden 1	Chr.Lyceum							1								1	
Oegstgeest 1	Rijnlands lyc.						1								1		
N.wijkerh. 1	Coll.Leeuwenhorst						1										1
Heemstede 1	Chr.Atheneum							1								1	
Coevorden 1	Rijksscholengem.									1			1				
Heerlen 1	Bernardinuscoll.			1													1
Voorburg 1	Huygenslyceum							1							1		
Rijswijk 1	Lod.Makeblijde coll.		1														1
Delft 1	St.Stanislas coll.							1									1
Culemborg 1	Kon.Wilh.coll.	1														1	
Zaandam 1	Zaanl.lyceum		1											1			
Breda 1	Lieve Vrouwen lyc.						1										1
Den Bosch 1	St.Jans lyceum			1													1

Bijlage III — Overzicht van de studieresultaten.

	1962	'63	'64	'65	1962/ 1965	'66	'67	'68	'69	1966/ 1969	'70	'71	1970/ 1971	Totaal
gegevens ontbreken	-	-	1	-	1	2	1	-	-	3	-	-	-	4
gepromoveerd	-	1 (3)	-	1 (3)	2 (6)	-	-	-	-	-	-	-	-	2 (6)
t/m doctoraal-of ingenieursexamen	4 (1)	7 (5)	6 (5)	4 (1)	21 (12)	1 (2)	2 (2)	-	-	3 (4)	-	-	-	24 (16)
t/m kandidaatsexamen	2 (1)	2	1	4 (1)	9 (2)	6 (1)	4 (1)	5 (1)	4 (1)	19 (4)	-	-	-	28 (6)
hoogstens prop.examen	1 EH	-	1	1	3	1	-	2	1	4	1	-	1	8
wel ingeschreven, geen examens	2	-	1	-	3	-	3	3	5	11	9	10	19	33
buitenl.universiteit of hogeschool	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1
van studierichting veranderd	1	-	3	1	5	1	3	-	2	6	-	-	-	11
studie gestaakt	1	-	2	-	3	1	-	-	-	1	-	-	-	4

Opmerkingen

1 Het aantal van hen die de studie aan de universiteit of hogeschool staakten staat niet ondubbelzinnig vast, doordat niet steeds duidelijk blijkt of er slechts sprake is van onderbreking.

2 De getallen tussen () geven voor de betrokkenen aan het aantal malen cum laude, dat bij het genoemde èn bij vorige examens werd bereikt.

3 Het niveau op een buitenlandse universiteit of hogeschool bereikt kon niet steeds worden vermeld.

4 Er is formeel opgeteld: er waren 100 'winnaars', maar slechts 99 'personen' die winnaar waren.

Zo doe ik het

Overzichtsblad

P. I. A. KNOPS

Heerlen

Bij de brugklasdelen van *Van A tot Z* en *Moderne Wiskunde* werden door het C.I.T.O. bij elke les een verzameling vierkeuzevragen samengesteld. Ze werden aangeduid als *diagnostische* toetsen. Doel ervan is voor leerling en leraar corrigerend op te treden ten aanzien van hiaten in de leerstof. Bij de praktische uitvoering blijkt, dat de leerling na enige lessen mogelijk geen overzicht meer heeft van de hiaten in de leerstof. Dit geldt zowel voor de individuele leerling, maar eveneens voor de leraar ten opzichte van de hele klas. Om aan dit te komen ontwierpen we het volgende overzichtsblad behorend bij Van A tot Z deel Ia (nieuwe versie):

	Z1	Z20	
	Z2	Z19	
	Z3	Z18	
	Z4	Z17	
	Z5	Z16	
	Z6	Z15	
	Z7	Z14	
	Z8	Z13	
	Z9	Z12	
	Z10	Z11	

'Recept bij het overzichtblad'

Z1, Z2 enz. dit zijn de lessen 1, 2 enz. uit Van A tot Z deel Ia.
Wanneer een leerling in een bepaalde toets 2 of minder fouten maakt, mag hij het rechthoekje helemaal en in één keer opvullen. Hij beheerst de leerstof van die les. Bij 3 of meer verkeerd ingevulde items mag hij slechts de helft opvullen. Vandaar de diagonaal in het betreffende rechthoekje. Het rechthoekje naast Z1, Z2 enz. (therapie-rechthoekje) dient om de vraagstukken uit die les te noteren, die de leerling nog eens moet doorwerken. Welke vraagstukken dit zijn staat bovenaan de toets vermeld voor elk fout item.
Wanneer de leerlingen het opvullen van hele en halve rechthoeken en de notatie ernaast in verschillende kleuren doen, heeft men als leraar vlug een overzicht van de mankementen bij de leerling, maar overziet men ook de zwakke punten van de klas.
Het overzichtsblad wordt gestencild op stevig karton en achteraan in het boek gelegd.

Voor de methode *Moderne Wiskunde* verandert Z1, Z2 enz. in M1, M2 enz.

Genootschap voor geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en natuurwetenschappen

Voorjaarsvergadering van het Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek.
Deze zal gehouden worden op zaterdag 27 april en zondag 28 april 1974 te Assen. Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen en toezending van het programma wenden tot de secretaris, Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Knokke 1973

P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

In maart werd door het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde het twaalfde internationale congres gehouden, tevens genaamd het Tweede Internationaal Congres van het Zwin. Waaruit niet geconcludeerd moet worden, dat zwinnen eenheden en knokkes een soort tientallen zijn. Men is eenvoudigweg na 10 opnieuw beginnen te tellen, omdat de organisatievorm gewijzigd werd.
Een volledig verslag van de acht interessante voordrachten vindt men in Niko. Hier wil ik ermee volstaan een kort verslag te geven van de eerste dag. Voorzitter Holvoet opende het congres met een voordracht, waarin hij memoreerde dat het streven naar onderwijsvernieuwing in de wiskunde in België thans 15 jaar oud is. Het oude schoolprogramma sloot goed aan bij de wiskunde van voor 1880. Sindsdien is de wiskunde geëvolueerd door toevoeging van verscheidene nieuwe onderdelen, zoals Riemann ruimten, grafentheorie, informatietheorie, groepentheorie. In het middelbaar onderwijs veranderde echter niets.
Een eerste stap in de goede richting was de oprichting in 1949 van de C.I.E.M. (Commission Internationale pour l'Enseignement Mathématique), waarin pionierswerk verricht werd door o.a. Gattegno en Papy.
In 1957 (5 oktober) bracht de Sputnik grote ontsteltenis teweeg, met name in Amerika. Gevolg: bezinning op de doelmatigheid van ons onderwijs. Is dat achter geraakt?
In 1958, dus 15 jaar geleden, eerste opzet van nieuwe leerplannen in België. De grote angst was: zullen leerlingen opgeleid conform een nieuw leerplan nog wel kunnen rekenen? Zullen ze nog wel voldoende voorbereid op de universiteit komen? Het nieuwe leerplan mocht dus wel de basis vormen voor een experiment, maar alleen daar waar het beslist geen kwaad zou kunnen doen. En dat was . . . op de kleuterkweekschool.
1959-60. Papy geeft persoonlijk les aan de kleuterkweekschool. Er verschijnt een gestencilde tekst van zijn lessen. Men vindt hierin: papygrammen, grafen, een nieuwe opzet van de theorie van de reële getallen, een begin van topologie. Na 3 jaar konden de kleuterleidsters nog steeds rekenen!
1961. Besluit met nieuwe leerstof te experimenteren bij het middelbaar onderwijs. Tevens besluit tot bijscholing van de wiskundeleraren.
Elk jaar wordt in Arlon een congres georganiseerd ter herscholing van de leraren. Het eerste had reeds plaats in 1959, het laatste zou in 1968 plaats hebben. Het aantal deelnemers bewoog zich in stijgende lijn van bijna 300 tot 625.
Verder: oprichting van het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde. Dit Centrum belast zich met herscholing van de leraren. Werkgroepen worden georganiseerd in aanvankelijk 14 en later zelfs 28 plaatsen, waar elke donderdagmiddag wiskundeleraren samenkomen op basis van vrijwilligheid om zich in te werken in de nieuwe leerstof. In totaal zijn door het Centrum 20000 lesuren gegeven.

1 september 1968. Invoering van het nieuwe programma op alle Belgische scholen.
1968. Het eerste nummer van het tweetalige tijdschrift Nico verschijnt, gewijd aan de nieuwe wiskunde. Later verschijnt een afzonderlijke Franse uitgave getiteld Nico, en een Nederlandse getiteld Niko. Thans ook in het Spaans vertaald onder de titel Nicosuba.
1967. Frédérique begint een experiment op de basisschool. Zij begint een groep van 40 leerlingen te onderwijzen in de eerste klas op moderne wijze. Dit experiment heeft ze met deze groep zes jaar lang volgehouden. Een uitvoerig verslag vindt men in L'enfant et la Mathématique waarvan drie delen verschenen zijn en het vierde in voorbereiding is.
Het belang van voorschoolse opvoeding wordt steeds meer ingezien. Vandaar dat Frédérique zich thans ook bezighoudt met het op ludieke wijze introduceren van sommige wiskundebegrippen bij het kleuteronderwijs.
Ziedaar in vogelvlucht de ontwikkeling van de onderwijsvernieuwing bij onze zuiderburen, een ontwikkeling die in ons land steeds met grote belangsteding gadegeslagen is.

In Euclides *48,* 1972/73, no. 1, blz. 10-12, vindt men een kort verslag van een experiment van Frédérique op de basisschool, waarbij ze een inleiding geeft in de theorie van de tweedimensionale vectorruimte en het oplossen van lineaire vergelijkingen met twee veranderlijken door middel van de vectoriel des achats. Het kopen van lineaire combinaties van twee soorten artikelen vormde de basis van de theorie.
Frédérique besprak nu een methode om in het zesde leerjaar leerlingen in contact te brengen met ruimtemeetkunde.
Drie inkopen worden door vectoren $\vec{e}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$ gerepresenteerd. Zie fig. 1. De drie inkopen kosten alle drie 20 F. Kan dat?

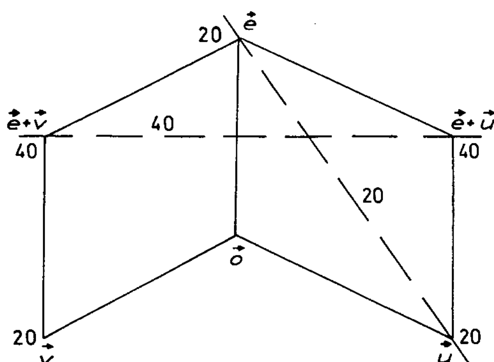


Fig. 1

Door een leerling wordt de onmogelijkheid gevonden. De verbindingslijn van $\vec{e}$ en $\vec{u}$ bestaat uit inkopen met prijs 20 F. De verbindingslijn van $\vec{e} + \vec{v}$ en $\vec{e} + \vec{u}$ uit inkopen met prijs 40 F. Deze lijnen snijden elkaar. Contradictie. Frédérique brengt de leerlingen ertoe in te zien, dat het wel kan als ze de figuur maar in de ruimte bezien[1]). Zie fig. 2. Wat is de verzameling van de inkopen met prijs 20 F?

[1]) Te voren is op soortgelijke wijze ter sprake gekomen, dat het mogelijk is dat drie lijnen onderling loodrecht zijn, als men maar de ruimte beschouwt.

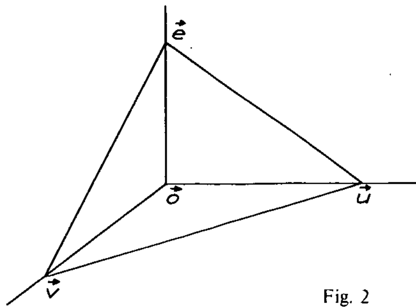


Fig. 2

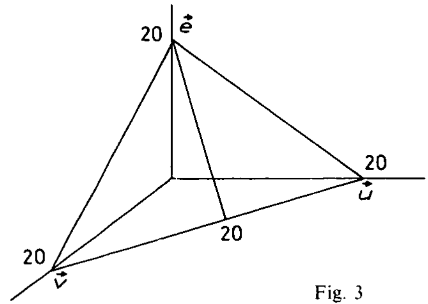


Fig. 3

Men vindt aanvankelijk een driehoek (drie lijnstukken). Later, zie fig. 3, een gesloten driehoek. En nog later, door verlenging van de lijnen, een vlak.
Volgende opgave. Teken $\vec{e} + \vec{u}$, $\vec{e} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{e} + \vec{u} + \vec{v}$. Zo ontstaat een soort kubus.

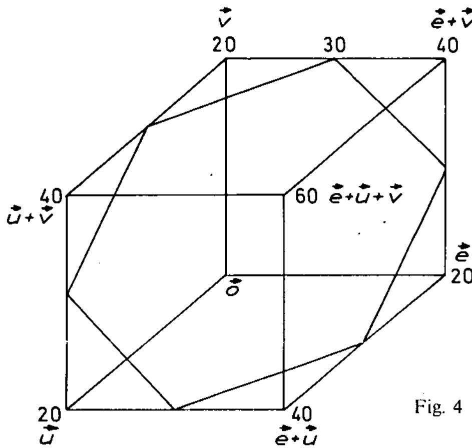


Fig. 4

Teken hierin alle inkopen van 30 F. Er ontstaat een zeshoek. Zie fig. 4.
Gegeven $\vec{e} = 10$ (*e* kost 10 F), $\vec{u} = 15$, $\vec{v} = 20$. Teken de verzameling van de achats gratuits. In fig. 5 zijn er drie getekend. Nu wordt de figuur te onoverzichtelijk om er verder iets mee te doen.

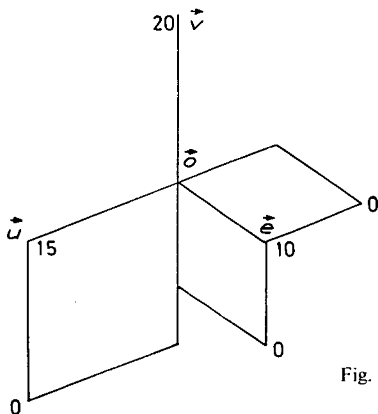


Fig. 5

De strategie wordt daarom gewijzigd. In elk coördinaatvlak ontstaat een lijn met achats gratuits en wel een lijn door de oorsprong. We tekenen nu onze figuur opnieuw, maar beginnen met twee van die lijnen 'op de grond' te tekenen. Zie fig. 6. De vlakken die inkopen van een constante prijs voorstellen, zijn nu vlakken evenwijdig aan de grond (analoog aan hetgeen in het platte vlak vroeger gevonden werd).

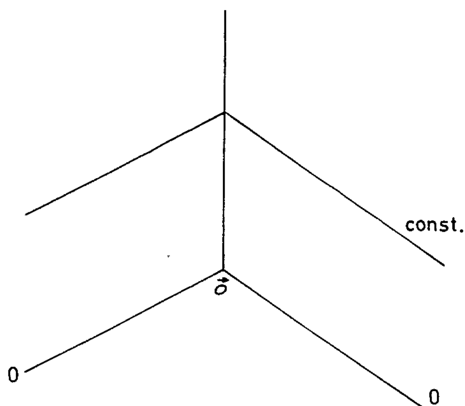


Fig. 6

In fig. 7 is uitgegaan van $\vec{e} = \vec{u} = \vec{v} = 10$ en zijn twee achats gratuits op de coördinaatassen (deze term is ten bate van de lezers maar uiteraard niet door Frédérique gebruikt) getekend. Samen met de oorsprong bepalen ze een vlak, dat getekend wordt. Parallel daarmee worden getekend de vlakken met inkopen van 10

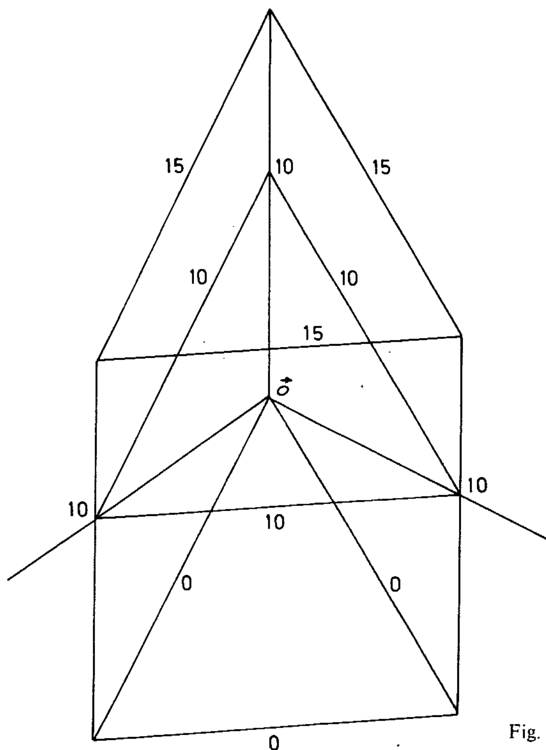


Fig. 7

en van 15 F. Concrete voorwerpen worden de leerlingen getoond en onder deze herkennen ze het driezijdige prisma als datgene dát ook in de getekende figuur een rol speelt.

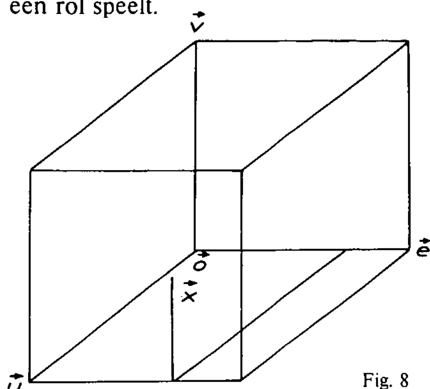


Fig. 8

Elk punt stelt een inkoop voor en heeft dus drie coördinaten. Teken het punt $\vec{x} = 0{,}75\vec{e} + \vec{u} + 0{,}5\vec{v}$. Dit punt blijkt in het voorvlak van de kubus te liggen. Zie fig. 8. Met opstijgende moeilijkheid worden andere punten getekend. Het centrum van de kubus blijkt als coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ te hebben.

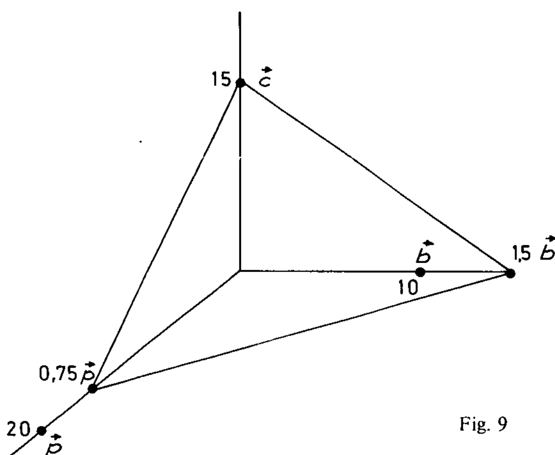


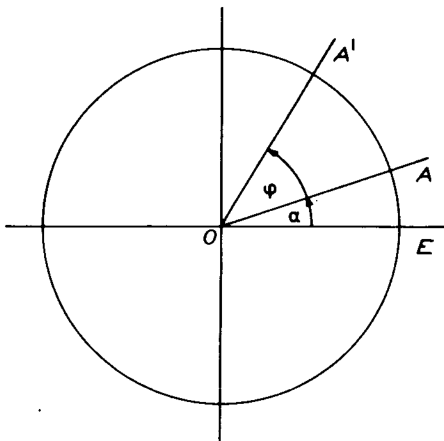
Fig. 9

Zoals in het platte vlak de vergelijking van een lijn gevonden werd, wordt nu de vergelijking van een vlak gevonden. Men koopt bonbons, peren en chips; 1 kg bonbons kost 10 F, 1 kg peren 20 F en 1 kg chips 15 F. De prijs van x kg bonbons, y kg peren en z kg chips is dan $x \cdot 10 + y \cdot 20 + z \cdot 15$ F. Teken alle inkopen van 15 F. Zie fig. 9. De inkopen van 15 F op de drie coördinaatassen worden getekend. Het vlak dat door deze drie punten bepaald wordt, is de gevraagde verzameling. Zo is dus het vlak $10x + 20y + 15z = 15$ getekend.

Het Derde Congres van het Zwin zal in 1974 plaats hebben rond Hemelvaartsdag (23 mei). Graag wil ik mijn collega's aanbevelen dan enige dagen vrij te houden om aanwezig te kunnen zijn. Het zal ze stellig goed bevallen.

Korrel

De transformatieformules bij een rotatie



Het beeld van $A(x_1, y_1)$ bij de rotatie om 0 over φ is $A'(x_1, y_1)$. Hoe leidt men snel en op eenvoudige wijze de bijbehorende transformatieformules af?

Als $OA = r$, $E(r, 0)$ en $\angle EOA = \alpha$ dan kan men stellen $A(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Het beeld A' heeft dan als coördinaten $A'(r \cos(\alpha + \varphi), r \sin(\alpha + \varphi))$.

Hieruit volgt dat de transformatieformules zijn:

$$x' = r \cos(\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$
$$y' = r \sin(\alpha + \varphi) = r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

E. C. Buissant des Amorie
Amstelveen

Isotrope coördinaten II

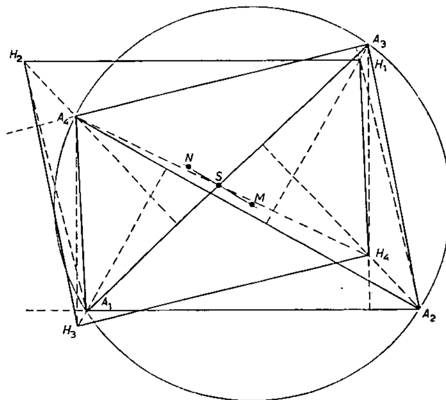
Dr.J.T. GROENMAN
Groningen

In Euclides 41,5 is door mij een uiteenzetting gegeven van het gebruik van isotrope coördinaten. Ik stelde daarbij dat deze coördinaten in het bijzonder zijn te gebruiken, indien de beschouwde figuur een omgeschreven cirkel bezit. Toevallig stuitte ik op enkele vraagstukken van Prof. dr. S.C. van Veen (nieuwe opgaven; deel XIX nr. 157 en nr. 158). Zij luiden:

a Vier willekeurige punten A_1,A_2,A_3,A_4 op de omtrek van een cirkel vormen drie aan drie genomen vier driehoeken.
Bewijs dat de vier hoogtepunten van deze driehoeken op een cirkel zijn gelegen die dezelfde straal heeft als de gegeven cirkel.

b Bewijs dat de negenpuntscirkels van de genoemde vier driehoeken door één punt gaan.

Beide vraagstukken zijn met behulp van isotrope coördinaten zonder moeite op te lossen.



a Wij nemen de straal van de cirkel = 1 en nemen de volgende coördinaten

$$A_1\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_1}\right);A_2\left(\alpha_2,\frac{1}{\alpha_2}\right);A_3\left(\alpha_3,\frac{1}{\alpha_3}\right);A_4\left(\alpha_4,\frac{1}{\alpha_4}\right);$$

dan is bv.

$$H_1\left[\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}\right]\cdot\text{(zie Euclides } \mathit{41}\text{, 5, p. 154-155),}$$

$$H_2\left[\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4 ; \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}\right] \text{ enz.}$$

Ik beweer dat de 4 punten H_i liggen op de cirkel

$$\left[x-\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)\right]\left[y-\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}\right)\right]=1$$

Bij substitutie van bv. H_1 komt er: $-\alpha_1 \times -\dfrac{1}{\alpha_1}=1$

De vier punten H_i liggen dus op een cirkel met middelpunt

$$N: \left[\sum_{i=1}^{4}\alpha_i ; \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\alpha_i}\right] \text{ en straal 1.}$$

b De Feuerbach-cirkel van $\Delta A_2 A_3 A_4$ heeft als vergelijking

$$\left[x-\frac{1}{2}\left(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)\right]\left[y-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}\right)\right]=\frac{1}{4}$$

(zie Euclides *41*, 5, p. 155)

Op de cirkel ligt het punt

$$S\left[\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4);\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}\right)\right]$$

Bij invulling komt er nl.: $\dfrac{1}{2}\alpha_1 \cdot \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\alpha_1}=\dfrac{1}{4}$

S ligt op de vier Feuerbachcirkels en is het midden van NM.
S is ook het midden van $A_i H_i$, want bijv.

$$x_s=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{1}{2}\{\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\}=\frac{1}{2}\left(x_{A_1}+x_{H_1}\right)$$
$$y_s= \quad \ldots \quad =\frac{1}{2}\left(y_{A_1}+y_{H_1}\right).$$

De vierhoek A_i en de vierhoek H_i zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. S.

c Wij bewijzen ook dat de 4 zwaartepunten van de beschouwde driehoeken concyclisch zijn.

$$Z_1\left[\frac{1}{3}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}\right)\right] \text{ enz.}$$

(zie Euclides *41*, 5, p. 154)

De punten Z_i liggen allen op de volgende cirkel.

$$\left[x-\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\right]\left[y-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}\right)\right]=\frac{1}{9}$$

Het middelpunt is $\left[\frac{1}{3}\Sigma\alpha_i\,;\frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{\alpha_i}\right]$ en de straal $\frac{1}{3}$.

Didactische Literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Niko, 12, 13; 1972-1973

In memoriam P. Wijdenes, 1872-1972;
A. Warrinnier, Categorieën en functoren;
Frédérique, Reële getallen;
Papy, Van het gewone topologische vlak naar het kenmerk van Cauchy voor rijen;
R. Holvoet, Cayley en de directe sommen van cyclische groepen;
R. Dieschbourg, Een methode om af te trekken in het eerste leerjaar;
Frédérique, Transformaties van het vlak;
M. Boffa, De propositielogica volgens de methode van de natuurlijke deductie;
A. Vermandel, De axiomatische methode, methode voor een op formele structuren gericht wiskunde-onderwijs (proefschrift).

Zwin 1973;
De tweede vergadering van de internationale groep;
Frédérique en Papy, Vectoriële inleiding tot de vergelijking van de rechte;
R. Holvoet, Vrije monoïden;
R. C. Sitia, Een experiment in de derde klas van het wetenschappelijk lyceum in Italië;
D. van Dalen, Logica en formele theorieën;
W. Martin, Enkele betrekkingen tussen linguïstiek en statistiek;
E. C. Martin, Enkele aantekeningen in verband met de ontmoeting van kinderen van het tweede leerjaar met de meetkunde;
Fr. Plastria, Zwin I;
T. Dutra, Vijfjarigen en . . . de minicomputer.

Boekbespreking

O.F. Serebryannikov, *Heuristic Principles and Logical Calculi*, vertaald uit het Russisch, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1972, 182 blz., £ 8.45.
De logica is oorspronkelijk uitgegaan van het natuurlijke denken, maar heeft zich door extrapolatie van de denkregels van dit natuurlijke denken verwijderd. Schrijver wil de omgekeerde weg bewandelen en de logica weer terugleiden naar haar oorspronkelijke taak. Hij beperkt zich daarbij tot de propositielogica. De systemen die het best parallel lopen met het natuurlijke denken, zijn het systeem van Gentzen en dat van Beth. Bij de eerste methode wordt alleen van deductieregels gebruik gemaakt, bij de tweede methode van semantische tableaus.
Schrijver acht het niet alleen de taak van de logica de juistheid van redeneringen te verifiëren, maar ook methoden te ontwerpen om waarheden op het spoor te komen. Wat kunnen we uit A concluderen? Waaruit kunnen we A afleiden? Deze vragen kunnen met behulp van de tableaus van Beth beantwoord worden. Bij het beantwoorden van de eerste vraag zet men A in de linker kolom (de kolom van de ware beweringen), bij het beantwoorden van de tweede vraag in de rechter.
In het tweede hoofdstuk tracht de auteur een stelsel van deductieregels te ontwerpen die er garant voor zijn, dat het deductieproces parallel met het natuurlijke denken verloopt. Reeds lang geleden is er oppositie gerezen tegen formules, als

$$A \supset (B \supset A) \text{ en } \neg A \supset (A \supset B)$$

Lewis ontwierp een logica met een afwijkende implicatie, de strict implication, waarin dergelijke formules niet meer afgeleid konden worden. Volgens de schrijver gaat Lewis en gaan ook latere ontwerpers van systemen met stricte implicatie (Ackermann) niet systematisch te werk hierbij. Daarom stelt hij criteria op waaraan formules dienen te beantwoorden, willen ze nog conform het natuurlijke denken geacht kunnen worden. Populair gezegd komen zijn criteria hierop neer, dat
a. geen variabele ergens fictief mag voorkomen (een variabele komt in een formule op een plaats fictief voor, als de formule overgaat in een ermee gelijkwaardige als we de variabele op die plaats door een nog niet in de formule voorkomende variabele vervangen);
b. de formule niet contraheerbaar mag zijn (een implicatie is bijv. contraheerbaar, als hij overgaat in een ermee gelijkwaardige door in het linker lid ergens A & B te vervangen door A, of in het rechterlid $A \vee B$ door A).
Deze criteria dienen om te voorkomen, dat in een uitspraak 'overbodige' bestanddelen voorkomen, hetgeen bij het 'normale' denken immers ook niet het geval is.
De hier geformuleerde criteria geven ruw weer in welke richting de schrijver denkt. De technische precisering vereist veel nauwkeurigheid. Met inachtneming van de geschetste criteria ontwerpt bij een theorie betreffende 'regular deducibility'.
In het hoofddeel van het boek onderstelt de schrijver kennis van logische systemen betreffende de propositierekening bekend. In een uitvoerige appendix (80 blz.) geeft hij een inleiding in de propositielogica, zodat ook voor degenen die onvoldoende bekend met dit onderwerp zijn, het boek toegankelijk wordt.
P.G.J. Vredenduin

Horst Tietz, *Lineare Geometrie*, 210 blz., 19 figuren, Uni-Taschenbücher 248, DM 19,80, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Dit is een tweede, opnieuw bewerkte en uitgebreide druk van een boek dat in 1967 verscheen bij Verlag Aschendorff, Münster. De auteur handelt volgens een didaktisch principe: in het eerste hoofdstuk wordt van de aanschouwingsruimte uitgegaan. De beschrijving daarvan met vectoren en lineaire vergelijkingen vormt de intuïtieve grondslag voor de in de beide volgende hoofdstukken behandelde theorie van de vectorruimten en van de dualiteit. Een nevenvoordeel van deze opzet is dat degenen die natuurkunde gaan studeren in dit eerste hoofdstuk de stof aantreffen die zij allereerst voor de toepassing nodig hebben.
In hoofdstuk II wordt het begrip vectorruimte axiomatisch ingevoerd. Voorbeelden worden gegeven; het begrip afhankelijkheid wordt bestudeerd, waarbij matrices worden geïntroduceerd.
In hoofdstuk III wordt de reeds in hoofdstuk I ontdekte samenhang tussen de beschrijving van deelruimten zowel met vectoren als met vergelijkingen bestudeerd in de abstracte vectorruimten. Daarbij wordt het begrip determinant ingevoerd.
Hoofdstuk IV behandelt de afbeeldingstheorie. Veel aandacht wordt geschonken aan invariante deelruimten, waaronder eigenvectoren.
In hoofdstuk V, dat over orthogonaliteit handelt, volgt de auteur een andere methode dan in de eerste druk. Hij beschrijft dit zelf als volgt: 'Um in unsere Uberlegungen, die vornehmlich für reelle und komplexe Vektorräume von Bedeutung sind, alle wichtigen Fälle einzubeziehen, wenden wir einen Kunstgriff an; durch ihn gelangen wir beispielsweise zu Skalarprodukten für komplexe Vektorräume, die sonst eine gesonderte Theorie erfordern würden. Der angekündigte Kunstgriff besteht darin, dass wir einen Vektorraum über einem kommutativen Körper als zweiseitigen Vektorraum betrachten, jedoch nicht unbedingt in der durch die übliche Beziehung $a\bar{a} = \bar{a}a$ ausgedrückten trivialen Weise."
Nadat volgens het inzicht van de schrijver, dat de eigenschappen van de aanschouwingsruimte beter met vectoren dan met punten kunnen worden beschreven, de theorie van de vectorruimten werd ontwikkeld, stelt de auteur zich in hoofdstuk VI de vraag of en hoe men bij een vectorruimte V een affiene puntenruimte kan construeren die tot V in een soortgelijke betrekking staat als de aanschouwingsruimte tot de verzameling van haar vectoren. Dit boek wordt de leraren aanbevolen die bij hun onderwijs in de vectormeetkunde de behoefte gevoelen aan een fundamentele oriëntering.
E.H. Schmidt

Puri & Sen, Nonparametric Methods in Multivariate Analysis, John Wiley & Sons, Inc.

Van de lezers van dit boek wordt voorkennis gevraagd zowel van waarschijnlijkheidsrekening en maattheorie als van statistiek. Van dit laatste vakgebied is vooral bekendheid met de klassieke (parametrische) multivariate analyse en met de concepten uit de parametervrije statistiek van belang. Ook wordt van de lezer gevergd dat hij, soms toch wel belangrijke, gedeelten van de bewijsvoering zelf levert, aangezien de auteurs vrij geregeld voor de 'details' van een bewijs naar een van de opgaven verwijzen.
Voor dit alles krijgt de lezer echter een systematisch overzicht van een belangrijk deel van een min of meer nieuw vakgebied: de parametervrije multivariate statistiek.
Om een indruk te geven van de behandelde onderwerpen worden hier de hoofdonderwerpen van de hoofdstukken vermeld.
Na enkele inleidende hoofdstukken komen in hoofdstuk IV toetsen aan de orde voor hypothesen omtrent de locatie voor één multivariate steekproef. Hoofdstuk V is gewijd aan toetsen voor hypothesen omtrent locatie en schaal in het geval van meerdere multivariate steekproeven.

In hoofdstuk VI wordt aandacht besteed aan schattingsproblemen. Voor problemen rond twee-factor variantieanalyse, zowel univariaat als multivariaat, worden in hoofdstuk VII parametervrije methoden gegeven. In hoofdstuk VIII komen vervolgens toetsen aan de orde voor onafhankelijkheid terwijl, als laatste hoofdonderwerp, in hoofdstuk IX, gekozen wordt voor toetsen voor de gelijkheid van onderlinge samenhang in meerdere multivariate steekproeven.

Deze hoofdstukken zijn voorzien van een uitgebreide opgavensectie en van vele verwijzingen naar de literatuur.

A.P.B.M. Vehmeijer

American Host Program
voor Nederlandse leerkrachten

Het Nederland-Amerika Instituut deelt mede, dat de American Host Foundation, Inc., te New York, voor de zomer 1974 met zijn AMERICAN HOST PROGRAM wederom de gelegenheid biedt tot kennismaking met het Amerikaanse leven aan een groot aantal Nederlandse leerkrachten, in de vorm van een gastvrij verblijf van één maand in de Verenigde Staten.

De deelnemers gaan per vliegtuig naar New York, waar men twee à drie dagen verblijft. Daarna logeert men vier weken bij een of twee Amerikaanse gezinnen.

Voorlopige vertrekdata:
GROEP I – 2 juli 1974 naar New York, 5 augustus 1974 uit New York
GROEP II – 16 juli 1974 naar New York, 19 augustus 1974 uit New York
GROEP III – 30 juli 1974 naar New York, 2 september 1974 uit New York.

De aan het programma verbonden kosten variëren al naar gelang het gedeelte van de Verenigde Staten, waaraan men de voorkeur geeft:

a het Oostelijke gedeelte $ 390
b het Middenwesten en/of Zuiden $ 490
c het Westen $ 650

Deze bedragen dekken alle kosten (inclusief het verblijf in New York), behalve zakgeld (± $ 200).

Nadere inlichtingen en formulieren betreffende dit programma kunnen tot uiterlijk 31 januari 1974 worden aangevraagd bij het:

NEDERLAND-AMERIKA INSTITUUT
Afdeling Studievoorlichting
Prinsengracht 919
Amsterdam, tel. 23 94 25

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wassenaersheuvel 73, Oosterbeek.

306 Het natuurlijke getal a wordt geschreven in het p-tallig stelsel. De som van de cijfers is a_1. Ook dit getal wordt p-tallig geschreven. De som van de cijfers is nu a_2. Enz. Hoe loopt het af?
Kies in het bijzonder $p = 2000$ en $a = 3948000$ en reken uit het hoofd uit, hoe het afloopt.

307 Van n getallen is de som s gegeven. De getallen zijn geheel positief, verschillend en kleiner dan of gelijk aan een gegeven getal p. Hoe bepalen we de getallen zo, dat hun produkt minimaal wordt?
Voer dit uit en bereken het minimum voor

$n = 10,\quad s = 200,\quad p = 50;$
$n = 5,\quad s = 60,\quad p = 47.$

Oplossingen

304 25 recruten van verschillende lengte zijn in een carré gerangschikt. Een sergeant zoekt uit elke rij de grootste, kiest de kleinste van deze vijf grootsten en haalt hem uit het carré. We noemen hem A_1. Daarna zoekt hij in elke kolom de kleinste onder de overgeblevenen en kiest van deze vijf kleinsten de grootste. Hij haalt deze uit het carré. We noemen hem A_2.
Gegeven is dat A_2 langer is dan A_1.
De sergeant herhaalt deze operaties. Wat kunnen we te weten komen van de lengten van $A_1, \ldots, A_9$?
Onderstel dat de plaatsen van A_1 en A_2 in het carré zijn:

```
.  .  P  .  A1
.  .  A2 .  .
.  .  .  .  .
.  .  .  .  .
.  .  .  .  .
```

Dan was A_1 langer dan P wegens de aard van de eerste operatie. En A_2 korter dan P wegens de aard van de tweede operatie. Dus A_2 korter dan A_1. Hetgeen niet het geval was.
Ook is onmogelijk

```
.  .  A2 .  A1
.  .  .  .  .
.  .  .  .  .
.  .  .  .  .
.  .  .  .  .
```

omdat dan A_2 korter dan A_1 zou zijn.

Blijft dus over een plaatsing van de volgende soort:

```
.  .  .  .  A1
.  .  .  .  A2
.  .  .  .  .
.  .  .  .  .
.  .  .  .  .
```

met A_2 in dezelfde kolom als A_1.
Duidt de personen op de stippen op de gebruikelijke manier aan met a_{kl}. We kunnen zonder de algemeenheid te schaden aannemen, dat

$$a_{11} < a_{12} < a_{13} < a_{14} < A_1 < A_2 < a_{53} < a_{54} < a_{55}$$

We kiezen nu de kortste onder de langsten (uit de rijen). Dit kan niet iemand zijn uit de derde, vierde of vijfde rij. Het is dus a_{14} of een nog kortere recruut uit de tweede rij. In elk geval is $A_3 < A_1$.
Nu kiezen we de langste onder de kortsten (uit de kolommen). Dit kan zijn a_{53}. Is $A_3 = a_{14}$, dan kan het ook een nog langere recruut uit de vierde kolom zijn. Is $A_3 \neq a_{14}$, dan is het a_{53}. In elk geval is $A_4 > A_2$.
Zo doorgaande vinden we, dat

$$A_9 < A_7 < A_5 < A_3 < A_1 < A_2 < A_4 < A_6 < A_8$$

305 *A* en *B* mogen om beurten van twee stapeltjes lucifers hetzelfde aantal afnemen of van één stapeltje een willekeurig aantal. De stapels bevatten 23 en 14 lucifers. *A* neemt er 5 af van de 23. Is dit verstandig? Hoe gaat *B* verder om de winst te verkrijgen?
We gaan na welke de winnende standen zijn, d.w.z. de standen waarbij men gegarandeerd wint, als men ze afgeeft.

Winnend is: 1, 2.
Verliezend dus

$$1+a,\ 2 \qquad 1,\ 2+a \qquad 1+a,\ 2+a \qquad (a>0)$$

De eerstvolgende winnende stand is dan: 3, 5.
Verliezend

$$3+a,\ 5 \qquad 3,\ 5+a \qquad 3+a,\ 5+a \qquad (a>0)$$

Enz.
De winnende standen zijn

1, 2	6, 10	11, 18	
3, 5	8, 13	12, 20	
4, 7	9, 15	14, 23	enz.

We zien hieruit, dat *A* zich de moeite kan besparen op winst te spelen. Voor *B* zijn er twee mogelijkheden: over te gaan naar 11, 18 of naar 6, 10.



International Institute
for Aerial Survey and Earth Sciences,
Boulevard 1945, Enschede, tel. 27272.

itc

Het Instituut verzorgt internationaal wetenschappelijk onderwijs en onderzoek op het gebied van luchtkaartering en aardkunde, waarbij de aktiviteiten gericht zijn op de behoeften van de ontwikkelingslanden.

Bij de verschillende disciplines die in het ITC voorkomen speelt de wiskunde een belangrijke rol. Ter versterking van een van de hoofdafdelingen zoeken wij kontakt met een

LERAAR WISKUNDE

Functie-inhoud

- Geven van wiskundelessen aan Engels en Franssprekende studenten
- Begeleiden van de studenten, vooral tijdens de beginfase van de kursussen.

Vereisten

- Wiskunde-opleiding op het niveau van M.O.-A; gelet op de disciplines van het ITC kan ook een HTS-er Landmeetkunde voor deze funktie in aanmerking komen
- Ruime onderwijservaring en belangstelling voor nieuwe onderwijsmethoden
- Goede kennis van de Engelse en Franse taal
- Positieve instelling t.o.v. ontwikkelingssamenwerking

Het salaris, afhankelijk van opleiding en ervaring, zal volgens rijksregeling worden vastgesteld. Direkte opneming in het Algemeen Burgerlijk Pensioenfonds. De premie AOW is voor rekening van het instituut.

Sollicitaties kunt U richten aan het Hoofd Personeelszaken van het ITC, Postbus 6 te Enschede.

INHOUD